数理解析研究所講究録
1057 巻 1998 年 110-112

Functions over groups

飯寄　信保
Nobuo Iiyori *

概 要

In this note, we will study basic properties of functions over groups.

1　序論

本研究は熊本大学大学院生阿部晴一さんとの共同研究である。群論、特に有限群論において群上の方程式（関数）の研究はつぎの Frobenius による定理から始まったといえるだろう。

Theorem 1 G を有限群、n を G の位数を割る自然数とする。この時、$\sharp\{x \in G|x^n = 1\} \equiv 0(\mathrm{mod}\, n)$ が成立する。

この定理についていろいろな研究者が数々の証明を与え、一般化や拡張を行っている。さてこの定理によると $\{x \in G|x^n = 1\}$ なる集合の濃度は０より大きい n の倍数であることがわかる。最近次の定理が有限単純群の分類定理を用いて証明された。

Theorem 2 G を有限群、n を G の位数を割る自然数とする。もし $\sharp\{x \in G|x^n = 1\} = n$ であるならば $\{x \in G|x^n = 1\}$ は G の正規部分群である。

これらの定理たちは、群上の方程式の根の集合は極めて興味深い性質を持っていることを我々に教えている。さらにこれらの定理から prime graph という素朴な概念や Brauer による一般指標の理論を通し sharp character、Brauer-Suzuki による例外指標の理論などと群上の方程式、関数の理論が関係があることを観察することができる。また一方で群上の方程式の理論は、群の表現を通して通常の体上の有理式による方程式系の議論にも持ち込むことができ、同様に群上の関数の理論も議論することが可能である。以上のことやいくつかの観察を踏まえると群上の関数論を展開することでいろいろな手法を用いて群の詳細な性質を調べることが可能になるのではないかと考えられる。このレポートでは、群上の関数と群の構造との基本的な関係について紹介するつもりである。興味を持たれた方や詳しく知りたい方は S. Abe and N. Iiyori"A theory of equations over groups"を参照していただきたいとおもいます。

*Department of Mathematics, Faculty of Education, Yamaguchi University Yamaguchi, Japan

2 記号など

G を群とする。G_0 は G を部分群として含む群とする。G 上の n 変数算術関数とはランク n の自由群 F_n と G との自由積 $\mathrm{E}_n(G) = F_n * G$ の元のことである（考える関数は算術関数以外のものは今回考えない）。$F_n =< X_1, X_2, \cdots, X_n >$ とおくと $g = (g_i) \in G_0^n$ に対して $\mathrm{E}_n(G)$ から G_0 への準同型写像 g^* で $g^*(X_i) = g_i$ を満たすものが存在する。そこで $f \in \mathrm{E}_n(G)$ に対して f の $g \in G_0^n$ における値 $f(g)$ を $f(g) = g^*(f)$ によって定義する。このようにして f は G_0^n から G_0 への関数と考えることができる。この関数の値の定義は $\mathrm{E}_n(G)$ の積と調和していることに注意する。よって $\mathrm{E}_n(G)$ から G_0 上の写像全体のなす群 $\mathrm{Map}(G_0)$ への標準的な準同型 μ が存在することを意味している。この μ の核は明らかに $\cap_{g \in G_0} \ker g^*$ と一致している。（逆にこの事実により μ を特徴づけることが可能である。）我々はいか $\mathrm{im}\mu$ を $\mathrm{PE}_n(G, G_0)$ とかくことにする。もちろんこの $\mathrm{PE}_n(G, G_0)$ は G_0 や G の構造と深く関係している。例えば次のような諸結果がある。

Proposition 1 G_0 を可換群、G をその部分群とする。$e = exp(G_0)$ とおくと $\mathrm{PE}_n(G, G_0) \simeq G \times (Z/eZ)^n$ が成立する。

Theorem 3 G を $Z/2Z$ または非可換単純群とする。任意の自然数 m、任意の相異なる m 個の G の元 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ と G の m 個の元 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ に対して次の条件を満たす $f \in \mathrm{PE}_1(G, G)$ が存在する：

$$f(a_i) = b_i \text{ for } (i = 1, 2, \cdots, m).$$

また逆も成立する。

Corollary 1 G を $Z/2Z$ または非可換有限単純群とする。このとき

$$\mathrm{PE}_1(G, G) \simeq G^{|G|}.$$

Proposition 2 G_0 を群、N, G を G_0 の部分群とする。もし $[N, G] \subset N$ かつ N が可換部分群であるなら $f(1) = 1$ を満たす任意の $f \in \mathrm{PE}_n(G, G_0)$ に対して $\{x \in G_0^n | f(x) = 1\} \cap N^n$ は N^n の部分群である。

このようにもし文学的に表現することが許されるのならば、「群上の算術関数の自由度は群の非可換度に比例する」というようなことがいえる。さて前出の Propsition に現れた重要な性質、概念などを整理しておく。$\mathrm{PE}_n(G, G_0)$ の部分群 $\{f \in \mathrm{PE}_n(G, G_0) | f(1) = 1\}$ を $\mathrm{PSE}_n(G, G_0)$、同様に $\mathrm{SE}_n(G) = \{f\, \mathrm{E}_n(G) | f(1) = 1\}$ とおく。$f \in \mathrm{PE}_n(G, G_0)$ または $f \in \mathrm{E}_n(G)$ に対して $\mathcal{SOL}_{G_0}(f) = \{x \in G_0^n | f(x) = 1\}$ とおき $\Lambda \subset \mathrm{PE}_n(G, G_0)$ または $\Lambda \subset \mathrm{E}_n(G)$ に対して $\mathcal{SOL}_{G_0}(\Lambda) = \{x \in G_0^n | f(x) = 1 \text{ for } f \in \Lambda\}$ とおく。この $\mathcal{SOL}_{G_0}(\Lambda)$ を Λ の解集合といい、この解集合を詳しく観察することが我々の重要な課題の一つである。

3 基本的な結果

ここではnotationや概念の不備等の理由によりこの関数の観察に関する最も基本となる結果を紹介するにとどめた。ここに述べる方向以外にも現在観察が進んでいるがそれについては前出の論文と現在用意しているいくつかの論文を参照していただきたい。

以下 G_0 を群、G をその部分群とする。

Lemma 1 $\mathrm{E}_n(G)^n, \mathrm{SE}_n(G)^n, \mathrm{PE}_n(G,G_0)^n, \mathrm{PSE}_n(G,G_0)^n$ の各元は G_0^n からそれ自身への写像であるが $\mathrm{E}_n(G), \mathrm{SE}_n(G,G_0), \mathrm{PE}_n(G), \mathrm{PSE}_n(G,G_0)$ は合成（積）（ここでは $*$ で表す。）についてモノイドをなす。

Proposition 3 $\Gamma = \mathrm{SE}_n(G,G_0), \mathrm{PSE}_n(G,G_0)$ は半分配環をなす。即ち Γ は自由群の積（これを通常の環の和とみる。"ゼロ"元は1。）に関して群をなし、合成（これを通常の環の積とみる。単位元は X。）についてモノイドになっておりさらに次をみたす：$f,g,h \in \Gamma$ に対して

$$(gh)*f = (g*f)(h*f), \quad 1*f = f*1 = 1, \quad X*f = f*X = f.$$

ここでこれらの半分配環について大切な性質がある。

Theorem 4 $\mathrm{E}_1(G)$ の単数群（可逆元のなす群）は $\{a^{-1}X^{\pm 1}b | a,b \in G\}$ であり $G \wr S_2$ と同型である。

実際この定理よりいろいろなことが導かれるわけであるがその一つにつぎがある。

Theorem 5

$$\mathrm{SE}_n(G)^n/[\mathrm{SE}_n(G)^n, \mathrm{SE}_n(G)^n] \simeq M_n(Z[G])$$

. ここの同型は（半分配）環同型である。

この定理と方程式系の解集合との関係について最後に述べようと思う。G を有限群とし、V を G の C 上の表現とする。$Z(GL(V)) \cap G = 1$ と仮定する。

Proposition 4 p を素数とする。$T_p = \{x \in GL(V) | x^p = 1\}$ とおく。このとき $\{f \in \mathrm{E}_1(G) | T_p \subset \mathcal{SOL}_{GL(V)}(f)\}$ は X^p を含む $\mathrm{E}_1(G)$ 最小の正規部分群と一致する。

この命題より $\mathrm{E}_1(G) = \mathrm{PE}_1(G)$ が直ちに得られる。この観察とほのとに簡単な微分積分の知識より次を得る。

Theorem 6 $f \in \mathrm{SE}_1(G)$ について $f[\mathrm{SE}_1(G), \mathrm{SE}_1(G)]$ が $\mathrm{SE}_1(G)/[\mathrm{SE}_1(G), \mathrm{SE}_1(G)] \otimes C$ の可逆元であるならば1は $\mathcal{SOL}_{GL(V)}(f)$ において孤立点である。